**©Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова»**

**Заключительный этап университетской олимпиады, 2023 г.**

**Математика**

**Физико-математическое образование (математика и информатика)**

**Физико-математическое образование (физика и информатика)**

**Максимальное количество баллов – 16**

**Решения заданий**

1. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии в 1,5 раза больше суммы её второго, четвёртого, шестого и восьмого членов. Найдите знаменатель прогрессии.

**(Количество баллов: 0 – 2)**

**Решение.** Последовательность**,** состоящаяизвторого, четвёртого, шестого и восьмого членов данной геометрической прогрессии также образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q^{2}$. Поэтому, используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии и данные условия задачи, получим уравнение: $\frac{b\_{1}(q^{8}-1)}{q-1}$ =$1,5∙ \frac{b\_{2}(q^{8}-1)}{q^{2}-1}$ . Из этого уравнения, учитывая, что $b\_{2}=b\_{1}q$, мы получаем $1,5∙q=q+1$, откуда следует, что $q$ = 2.

**Ответ:**2

1. Решите неравенство $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}-16}{x^{2}+2x+5}<0$.

**(Количество баллов: 0 – 3)**

**Решение.** Так как выражение $x^{2}+2x+5$ положительно при любом *х*, то равносильным данному неравенству будет неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}-16<0$, или $\left(2\right)^{-3-x}<2^{4}$. Далее, поскольку основание $2>1$, имеем$-3-x<4$, откуда $x>-7$. Итак, получаем ответ $\left(-7; +\infty \right)$.

**Ответ:** $\left(-7; +\infty \right)$.

1. а) Решите уравнение

$sinx+sin2x+sin3x+sin4x=0$.

б) Найдите наименьший положительный корень этого уравнения.

**(Количество баллов: 0 – 3)**

**Решение.** а) Преобразуем левую часть уравнения следующим образом, используя формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$sinx+sin2x+sin3x+sin4x=2cosx∙\left(sin2x+sin3x\right)=4cosx∙cos\frac{x}{2}∙sin\frac{5x}{2}$$

Уравнение принимает вид:$ 4cosx∙cos\frac{x}{2}∙sin\frac{5x}{2}=0$ и распадается на три уравнения:

$sin\frac{5x}{2}=0$, или $cos\frac{x}{2}=0$, или $cosx=0$. Значит, $x=\frac{2πn}{5}, n\in Z$**,** или $x=π+2πm, m\in Z $или $x=\frac{π}{2}$+$πk, k\in Z$**.**

б) Наименьший положительный корень в решении $x=\frac{2πn}{5}, n\in Z $, равен $\frac{2π}{5}$ при *n* = 1. Наименьший положительный корень в решении $ x=π+2πm, m\in Z$ $ $ , равен $π$ при *m* = 0. Наименьший положительный корень в решении $x=\frac{π}{2}$+$πk, k\in Z$, равен $\frac{π}{2}$ при $k$ = 0. Выбрав меньшее из чисел $\frac{2π}{5}$, $π$ и $\frac{π}{2}$, получим наименьший положительный корень уравнения $\frac{2π}{5}$.

**Ответ:** а) $\frac{2πn}{5}, n\in Z$; $π+2πm, m\in Z$; $\frac{π}{2}$+$πk, k\in Z$**.**

б) $\frac{2π}{5}$.

1. В прямоугольном треугольном треугольнике *АВС* угол *С* – прямой, *СН* – высота, *АН*:*ВС*=3:2. Найти площадь треугольника *АВС*, если радиус описанной около него окружности равен 6.

**(Количество баллов: 0 – 4)**

**Решение.** Положим *АН*=3*х*, *ВС*=2*х*, *ВН*=*у*.

Из треугольника *АВС* находим .

Из треугольника *СВН* находим .

Отсюда ;

;

.

 *y*=*x* или *y*= –4*х*.

Условию задачи удовлетворяет *y*=*x*. Тогда $4x=12$, $x=3$, $3x=9$. По известному свойству высоты, проведенной к гипотенузе, находим $CH=\sqrt{AH∙BH}=\sqrt{3∙9}=3\sqrt{3}$. Площадь треугольника $S=\frac{1}{2}AB∙CH=\frac{1}{2}∙12∙3\sqrt{3}=18\sqrt{3}$.

**Ответ:**$ 18\sqrt{3}$.

5.Через точку $A(-5;0)$ проведена прямая, пересекающая график функции $y=x^{2}$ в точках с абсциссами $x\_{1}$ и $x\_{2}$. Найдите значение выражения $\frac{1}{x\_{1}}+\frac{1}{x\_{2}}$.

**(Количество баллов: 0 – 4)**

**Решение.** Запишем уравнение прямой в виде $y=kx+b$. Подставив в это уравнение координаты точки $A(-5;0)$, получим $b=5k$ и уравнение прямой примет вид $y=kx+5k$. Абсциссы точек пересечения данной прямой с графиком функции $y=x^{2}$ будут являться корнями уравнения $x^{2}=kx+5k$ или $x^{2}-kx-5k=0$. По теореме Виета $x\_{1}+x\_{2}=k$, $x\_{1}∙x\_{2}=-5k$. Тогда $\frac{1}{x\_{1}}+\frac{1}{x\_{2}}=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{x\_{1}∙x\_{2}}=\frac{k}{-5k}=-\frac{1}{5}$.

**Ответ**: $-\frac{1}{5}$.