**©Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова»**

**Заключительный этап университетской олимпиады, 2023 г.**

**Математика**

**Физико-математическое образование (математика и информатика)**

**Физико-математическое образование (физика и информатика)**

**Максимальное количество баллов – 16**

**Решения заданий**

1. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии в 1,5 раза больше суммы её второго, четвёртого, шестого и восьмого членов. Найдите знаменатель прогрессии.

**(Количество баллов: 0 – 2)**

**Решение.** Последовательность**,** состоящаяизвторого, четвёртого, шестого и восьмого членов данной геометрической прогрессии также образует геометрическую прогрессию со знаменателем . Поэтому, используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии и данные условия задачи, получим уравнение: = . Из этого уравнения, учитывая, что , мы получаем , откуда следует, что = 2.

**Ответ:**2

1. Решите неравенство .

**(Количество баллов: 0 – 3)**

**Решение.** Так как выражение положительно при любом *х*, то равносильным данному неравенству будет неравенство , или . Далее, поскольку основание , имеем, откуда . Итак, получаем ответ .

**Ответ:** .

1. а) Решите уравнение

.

б) Найдите наименьший положительный корень этого уравнения.

**(Количество баллов: 0 – 3)**

**Решение.** а) Преобразуем левую часть уравнения следующим образом, используя формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

Уравнение принимает вид: и распадается на три уравнения:

, или , или . Значит, **,** или или +**.**

б) Наименьший положительный корень в решении , равен при *n* = 1. Наименьший положительный корень в решении , равен при *m* = 0. Наименьший положительный корень в решении +, равен при = 0. Выбрав меньшее из чисел , и , получим наименьший положительный корень уравнения .

**Ответ:** а) ; ; +**.**

б) .

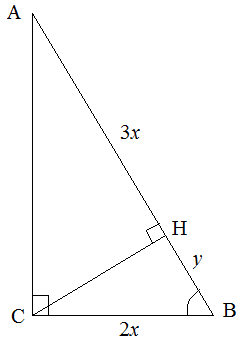
1. В прямоугольном треугольном треугольнике *АВС* угол *С* – прямой, *СН* – высота, *АН*:*ВС*=3:2. Найти площадь треугольника *АВС*, если радиус описанной около него окружности равен 6.

**(Количество баллов: 0 – 4)**

**Решение.** Положим *АН*=3*х*, *ВС*=2*х*, *ВН*=*у*.

Из треугольника *АВС* находим .

Из треугольника *СВН* находим .

Отсюда ;

;

.

*y*=*x* или *y*= –4*х*.

Условию задачи удовлетворяет *y*=*x*. Тогда , , . По известному свойству высоты, проведенной к гипотенузе, находим . Площадь треугольника .

**Ответ:**.

5.Через точку проведена прямая, пересекающая график функции в точках с абсциссами и . Найдите значение выражения .

**(Количество баллов: 0 – 4)**

**Решение.** Запишем уравнение прямой в виде . Подставив в это уравнение координаты точки , получим и уравнение прямой примет вид . Абсциссы точек пересечения данной прямой с графиком функции будут являться корнями уравнения или . По теореме Виета , . Тогда .

**Ответ**: .